18/12/2017

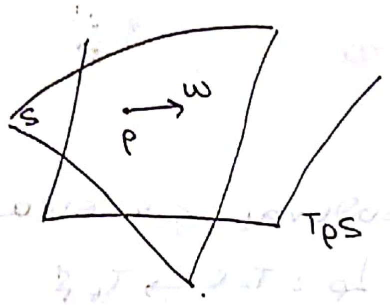
Μαθημα 20
Διαφορικη Γεωμ.

Ασυμπτωτικες διευθυνσεις

$w \in T_pS \setminus \{0\}$ καλειται ασυμπτ. διευθ $\Leftrightarrow k_n(w)=0 \Leftrightarrow II_p(w)=0$

$\Leftrightarrow ea^2+2fab+gb^2=0$

$w=aX_u+bX_v$



Ασυμπτωτικες καμπυλες

$c(t)$ καλειται ασυμπτωτικη $\Leftrightarrow$ ειναι κανονικη και $c'(t)$ ειναι ασυμπτ. διευθ. $\forall t \in I$

$c(t)=X(u(t),v(t))$ ειναι ασυμπτωτικη $\Leftrightarrow$

$e(u(t),v(t))(u'(t))^2+2fu'v'+g(u')^2=0$

Προταση

Εστω $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ συστ. συντ.

i) Αν οι παραμ. καμπυλες ειναι ασυμπτ. τοτε $e=0=g$

ii) Αν $K<0$ και $e=0=g$ τοτε οι ασυμπτ. καμπυλες ειναι ακριβως οι παραμετρικες καμπυλες

αποδειξη

ii) Η $c(t)=X(u(t),v(t))$ ειναι ασυμπτ $\Leftrightarrow K<0 \Leftrightarrow eg-f^2<0$

$$\left.\begin{array}{l} f(u(t),v(t))\,u'(t)\,v'(t)=0 \\ -f^2<0 \Leftrightarrow f\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u'(t)=0 \text{ η } v'(t)=0 \Rightarrow \\ u(t)=\sigma\tau\alpha\theta \text{ η } v(t)=\sigma\tau\alpha\theta. \end{array}$$

Το X καλειται σωμα ασυμπτ. καμπυλων αν οι παραμετρικες καμπυλες ειναι ασυμπτ. καμπυλες

Θεωρημα

Εστω S επιφανεια με καμπυλη Gauss $K<0$. Για καθε σημειο p υπαρχει σωμα $X: U \to S$ ασυμπτ. καμπ με $p \in X(U)$

Κυριες διευθυνσεις - γραμμες καμπυλοτητας

Ορισμος

i) $w \in T_pS \setminus \{0\}$. Το w καλειται κυρια διευθυνση $\Leftrightarrow$ ειναι ιδιοδιανυσμα της απεικονισης Weingarten $L_p : T_pS \to T_pS$

ii) Μια επιφανειακη καμπυλη $c: I \to S$ καλειται γραμμη καμπυλοτητας $\Leftrightarrow$ $c'(t)$ ειναι κυρια διευθυνση $\forall t \in I$

Προταση

Το $w = aX_u + bX_v \neq 0$ ειναι κυρια διευθυνση $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

αποδειξη

Το w ειναι κυρια διευθ $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : L_p w = \lambda w \Leftrightarrow$

$$L_p(aX_u + bX_v) = \lambda(aX_u + bX_v) \Leftrightarrow aL_pX_u + bL_pX_v = \lambda a X_u + \lambda b X_v$$

$$L_pX_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v$$

$$L_pX_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$a(a_{11}X_u + a_{21}X_v) + b(a_{12}X_u + a_{22}X_v) = \lambda a X_u + \lambda b X_v \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a a_{11} + b a_{12} = \lambda a \\ a a_{21} + b a_{22} = \lambda b \end{cases} \xRightarrow[\text{το } \lambda]{\text{απαλ.}} \begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

(αλγεβρική εξ. $2^{ου}$ βαθμού)

Συμπέρασμα (τι κάνω για να βρω τις γραμμές καμπυλ.)

Η $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γραμμή καμπυλότητας $\Leftrightarrow$

$c'(t) = u'(t)\, X_u(u(t), v(t)) + v'(t)\, X_v(u(t), v(t))$ είναι κύρια διεύθ

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} (u'(t))^2 & -u'(t)\, v'(t) & (v'(t))^2 \\ E(u(t), v(t)) & F(..) & G(..) \\ e(u(t), v(t)) & f(..) & g(..) \end{vmatrix} = 0$$

- Το X καλείται σύστημα συντετ. γραμμών καμπυλότητας $\Leftrightarrow$ οι παραμετρικές του καμπύλες είναι οι γραμμές καμπυλότητας

Πρόταση

Έστω S κανονική επιφάνεια ώστε $k_1 > k_2$. Τότε το σύστημα συντετ. X είναι σύστημα γραμμής καμπυλότητας $\Leftrightarrow$ $F = f = 0$

απόδειξη

Η $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γραμ. καμπυλ $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} (u')^2 & -u'v' & (v')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

- Έστω $F = 0 = f$ τότε η $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γραμ. καμπυλ $\Leftrightarrow$

$$u'v' \begin{vmatrix} E & G \\ e & g \end{vmatrix} = 0$$

$$u'v'\begin{vmatrix} E & G \\ e & g \end{vmatrix} = 0 \iff u'v'(Eg - Ge) = 0 \iff \frac{e}{E} = \frac{0}{0} = \frac{g}{G} \iff k_1 = k_2$$

αν ένα θετ. ποσό $=0$ και το άλλο θα είναι $=0$

Συνεπώς δε μπορεί να μηδενίζεται η ορίζουσα γιατί από υπόθεση έχω ότι $k_1 > k_2$

άρα $\iff u' = 0$ ή $v' = 0$

- Αντίστροφα. Έστω ότι X είναι γραμ. καμπυλ. $\Rightarrow X_u, X_v$ κύριες διευθύνσεις [που αντιστοιχούν στις καμπυλότητες (κύριες) k_1, k_2]

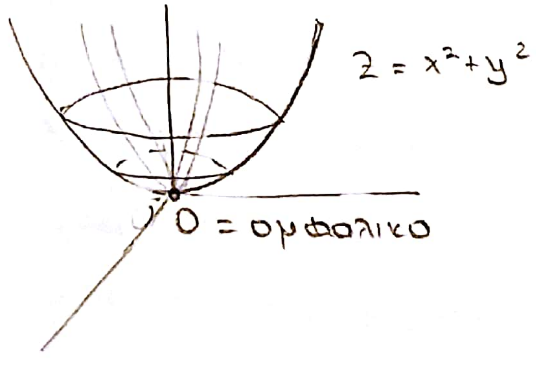
αυτοπροσαρμοστη γραμμ. $\Rightarrow$ ιδιοδιανύσματα κάθετα μεταξύ (ενδομορφή) ητοι $\langle\, ,\rangle = 0$

$$\overset{k_1 > k_2}{\Rightarrow} \langle X_u, X_v \rangle = 0 \Rightarrow F = 0,\ f = \langle L X_u, -X_v \rangle = 0$$

$F = 0 = f$ εκ περιστροφής επιφ.
γραμ. καμπ.

Θεώρημα
Έστω S επιφ. με $k_1 > k_2$. Τότε για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει σύστημα γραμμών καμπυλότητας $X : U \to S$ με $p \in X(U)$

εκ περιστροφής επιφάνειας + ισομετρική



Scanned by CamScanner

Θεώρημα Rodrigues

Η κανονική επιφάνεια καμπύλη $c: I \to S$ είναι γραμμή καμπυλ. $\iff$ $\exists$ συνάρτηση $\lambda: I \to \mathbb{R}$ ώστε $(N \circ c)'(t) = \lambda(t)\, c'(t)$

αποδειξη

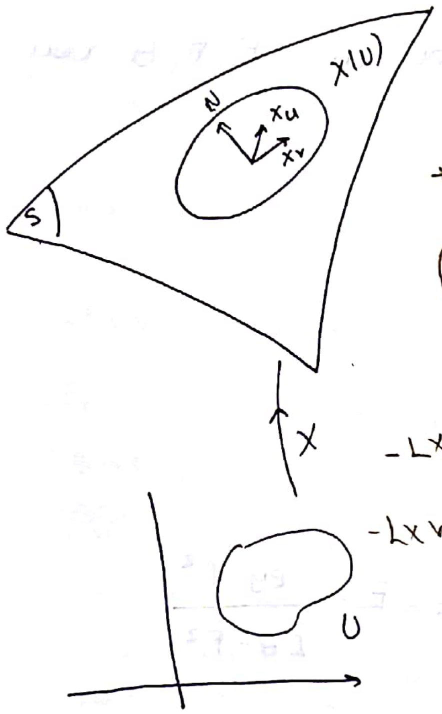
c γραμμή καμπυλ. $\iff$ $c'(t)$ ένα ιδιοδιαν. τ.ω $L_{c(t)}: T_{c(t)}S \to T_{c(t)}S$

$\iff$ $\exists \lambda(t)$: $L_{c(t)}(c'(t)) = -\lambda(t)\, c'(t)$ $\iff$ $-dN_{c(t)}(c'(t)) = -\lambda(t)\, c'(t)$

$\iff$ $(N \circ c)'(t) = \lambda(t)\, c'(t)$

αντιστοιχία
u στο 1
v στο 2

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\| x_u \times x_v \|}$$



$\{x_u, x_v, N\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{aligned}
x_{uu} &= \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + \cancel{\ell_{11}}\, e\, N \\
x_{uv} &= \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + \cancel{\ell_{12}}\, f\, N \\
x_{vu} &= \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + \cancel{\ell_{21}}\, f\, N \\
x_{vv} &= \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + \cancel{\ell_{22}}\, g\, N
\end{aligned}\right\}\ \text{Tύποι του Gauss}$$

$$\left.\begin{aligned}
-Lx_u = N_u &= b_{11} x_u + b_{12} x_v + 0 \cdot N \\
-Lx_v = N_v &= b_{21} x_u + b_{22} x_v + 0 \cdot N
\end{aligned}\right\}\ \text{Tύποι του Weingarten}$$

Οι συναρτήσεις Γ_{ij}^k, $i,j,k = 1,2$ καλείται σύμβολο christoffel του X

$l_{11} = \langle X_{uv}, N \rangle = e \qquad l_{12} = l_{21} = f \ , \quad l_{22} = g$

$$-(b_{ij}) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Απο το θεωρημα schwarz

$$X_{uv} = X_{vu} \Rightarrow \Gamma_{12}^{u} = \Gamma_{21}^{u}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} E\,\Gamma_{11}^{1} + F\,\Gamma_{11}^{2} = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}(\langle X_u, X_u \rangle)_u = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^{1} F + \Gamma_{11}^{2} G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = (\langle X_u, X_v \rangle)_u - \langle X_u, X_{uv} \rangle = \\ \qquad = F_u - \frac{1}{2} \langle X_u, X_u \rangle_v = F_u - \frac{1}{2} F_v \end{cases}$$

Λημμα

Τα συμβολα Christoffel εξαρτωνται μονο απο τα E, F, G και τις παραγωγους της 1ης ταξης.

$$\left.\begin{aligned} (X_{uu})_v &= (X_{vu})_u \\ (X_{uv})_v &= (X_{vv})_u \\ N_{uv} &= N_{vu} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

Εξισωση Gauss

$$(\Gamma_{12}^{1})_u - (\Gamma_{11}^{2})_v + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} + (\Gamma_{12}^{2})^2 - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} = -E \cdot \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

καμπυλοτητα Gauss

$$\left.\begin{aligned} e_v - f_u &= e\,\Gamma_{12}^{1} + f(\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1}) - g\,\Gamma_{11}^{2} \\ f_v - g_u &= e\,\Gamma_{12}^{1} + f(\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{2}) - g\,\Gamma_{22}^{2} \end{aligned}\right\}$$

Εξισωση Codazzi

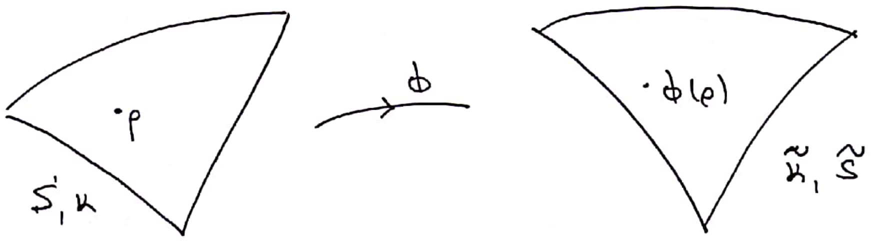
Theorem Egregium (Έξοχο Θεώρημα)

Η καμπυλότητα Gauss εξαρτάται μόνο από την εσωθεν γεωμετρία δηλαδή από την 1η θεμελ. μορφή

ισομετρικές : ίδια εσωθεν γεωμ.

Πόρισμα

Έστω $S, \tilde{S}$ ισομετρικές επιφάνειες και $\phi : S \to \tilde{S}$ η μεταξύ τους (τοπική) ισομετρία



$$K(p) = \tilde{K}(\phi(p)) \quad \forall\, p \in S$$

Θεμελιώδες Θεώρημα Επιφανειών (Θεώρημα Bonet)

1) Ύπαρξη. Δίνονται συναρτήσεις $E, F, G, e, f, g : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τ.ω $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$ και να πληρούν τις εξισώσεις Gauss, Mainardi-Codazzi. Τότε για σημείο $q_0 \in V$ υπάρχει περιοχή τ.ω $U \subset V$ και απεικόνιση $X : U \to \mathbb{R}^3$ τ.ω $X(U)$ είναι κανονική με θεμελ. μορφ. 1ης και 2ης τάξης τις δοθείσες συναρτήσεις E, F, G, e, f, g

2) Μοναδικότητα. Αν $X, \tilde{X} : U \to \mathbb{R}^3$ είναι όπως στο (1). Τότε υπάρχει $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ που διατηρεί το προσανατολισμό, $\tilde{X} = T \circ X$

→ δεν έχει το κατοπτρισμό μέσα.

• Υπαρχει επιφανεια με $E=G=1$, $F=0$, $e=g=0$, $f=1$

αρα $K\equiv0$ αν $E=G=1$, $F=0$

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=-1$$ αλλος τροπος για να την υπολογισω την καμπ. Gauss

Αρα δε γινεται να μη χρησιμοποιησω τις Εξισωσεις